Задачі до колоквіуму в II семестрі

1. Знайти співвідношення між ядрами $L(x,x')$ та $L(p,p')$ оператора L в x - та p - представленнях.

2. Знайти вигляд оператора $1/r$ в p -представленні.

3. Знайти вигляд оператора $1/r^2$ в p -представленні

4. Довести операторну тотожність Вейля: $\exp(A)\exp(B) \equiv \exp\left(\frac{1}{2}[A,B]\right)\exp(A+B)$, якщо $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$.

5. Довести, що $[A,B^n] = \sum_{s=0}^{n-1} B^s [A,B] B^{n-s-1}$.

6. Довести, що не існує жодного ненульового власного стану для оператора народження a^+.

7. Знайти унітарний оператор, який відповідає перетворенню Галілея, тобто переходу до нової інерційної системи відліку. Довести, що рівняння Шредінгера інваріантне відносно цього перетворення.

8. Знайти оператори координати та імпульсу в представленні Гейзенберга для вільної частинки.

9. Знайти оператори координати та імпульсу в представленні Гейзенберга для частинки, яка знаходиться в однорідному полі $U(x) = -F_0 x$.

10. Частинка знаходиться в потенціальній ямі з нескінченно високими стінками шириною a $(0 < x < a)$. Знайти в першому порядку теорії збурень зсув енергетичних рівнів під дією збурення

$$V(x) = \frac{V_0}{a}\left(a - |2x - a|\right) ,$$

і оцінити умови застосування отриманого результату.

11. Частинка знаходиться в потенціальній ямі з нескінченно високими стінками шириною a $(0 < x < a)$. Знайти в першому порядку теорії збурень зсув енергетичних рівнів під дією збурення

$$V(x) = \begin{cases} V_0, b < x < a - b \\ 0,\ 0 < x < b, a - b < x < a \end{cases}.$$

12. Гамільтоніан осцилятора має вигляд $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} + \alpha x^3$. Вважаючи останній доданок малим збуренням, обчислити в перших двох порядках теорії збурень зсув енергетичних рівнів.

13. Гамільтоніан осцилятора має вигляд $H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{k}{2}\left(x^2 + y^2\right)$. Знайти розщеплення першого збудженого рівня під дією збурення $V = \alpha xy$.

14. На частинку, яка знаходиться в потенціальній ямі з нескінченно високими стінками шириною a $(0 < x < a)$ при $t \to -\infty$, накладається слабке однорідне поле

$$V(x,t) = -xF_0 \exp\left(-t^2/\tau^2\right).$$

В першому порядку теорії збурень обчислити імовірність збудження різних станів частинки при $t \to \infty$.

15. На частинку, яка знаходиться в потенціальній ямі з нескінченно високими стінками шириною a $(0 < x < a)$ при $t \to -\infty$, накладається слабке однорідне поле

$$V(x,t) = -\frac{xF_0}{1 + (t/\tau)^2}.$$

В першому порядку теорії збурень обчислити імовірність збудження різних станів частинки при $t \to \infty$.

16. Обчислити $\langle 1/r \rangle$ та $\langle 1/r^2 \rangle$ для атома водню.

17. Знайти власні значення та власні стані для оператора $\vec{n}\vec{\sigma}$, де $\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$, а $\vec{\sigma}$ - оператор-вектор, компонентами якого є матриці Паулі.

18. Для частинки зі спіном 1 знайти закон перетворення спінової частини хвильової функції при повороті системи координат на кути Ейлера φ, θ та ψ. *Вказівка:* оператор повороту на кут α навколо вісі OX (OY,OZ) має вигляд

$$T\left(\alpha\right) = \exp\left(i\alpha J_{x(y,z)}\right),$$

де J_i - відповідна компонента оператора моменту імпульсу (в одиницях $\hbar$).

19. Розрахувати ефект Штарка для атома водню, що знаходиться в станах з $n = 1$ та $n = 2$.

20. Знайти прямим варіаційним методом енергію основного стану атома водню, вибравши хвильову функцію у вигляді:

$$\psi = A(1 + \alpha r)e^{-\alpha r}.$$

21. Знайти прямим варіаційним методом енергію основного стану атома водню, вибравши хвильову функцію у вигляді:

$$\psi = Ae^{-\alpha r}.$$

22. Знайти прямим варіаційним методом енергію частинки, що знаходиться в кулонівському полі в двовимірному випадку. Показати, що енергія зв'язку в 4 рази більша, ніж відповідна енергія у тривимірному випадку. Хвильову функцію обрати у вигляді:

$$\psi = Ae^{-\alpha\rho}.$$

23. Використавши хвильову функцію основного стану атома водню в координатному представленні, знайти її в імпульсному представленні і розподіл ймовірностей різних значень імпульсу.

24. Знайти коефіцієнт відбиття R та проходження D для потенціального бар'єру

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0\,, \\ V_0, & 0 < x\,. \end{cases}$$

25. Знайти коефіцієнт відбиття R та проходження D для потенціального бар'єру

$$V(x) = V_0 - \alpha x^2.$$

Енергія частинки $E < V_0$.

26. Знайти власні значення та власні вектори операторів Паулі σ_x, σ_y, σ_z.

27. Розрахувати для системи двох електронів власні значення та власні вектори операторів $\widehat{S}^2$ та $\widehat{S}_z$, де $\widehat{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2}\left(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_1 + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_2\right)$.

28. Довести тотожність

$$\left(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\widehat{\boldsymbol{A}}\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\widehat{\boldsymbol{B}}\right) = \left(\widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{B}}\right) + i\left(\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \left[\widehat{\boldsymbol{A}} \times \widehat{\boldsymbol{B}}\right]\right) ,$$

де $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ – оператор-вектор, компонентами якого є матриці Паулі.

29. Розрахувати $\widehat{\dfrac{dx}{dt}}$, якщо гамільтоніан системи дорівнює

$$H = -c\widehat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}) - mc^2\widehat{\beta} + e\varphi \,.$$

Тут $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$ – чотиривимірний оператор-вектор, компоненти якого виражаються через матриці Паулі, а $\widehat{\beta}$ – чотиривимірна діагональна матриця:

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \widehat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \end{pmatrix} , \quad \widehat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

30. Знайти величину розщеплення спінових рівнів електрона в постійному магнітному полі $\boldsymbol{H}_0$. Визначити ймовірність переходу між цими рівнями за одиницю часу під дією монохроматичного магнітного поля з напруженістю $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_{10}\cos\omega t$, що є перпендикулярним до $\boldsymbol{H}_0$.

31. Адіабатичним методом знайти рівні для системи з гамільтоніаном

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{kx^2}{2} + \frac{ky^2}{2} + \alpha xy \,,$$

коли $M \gg m$.

32. Розрахувати в борнівському наближенні диференціальний переріз пружного розсіяння позитивно зарядженої частинки з зарядом q на атомі. Атом складається з ядра з зарядом Ze та електронів, густину заряду яких представити у вигляді $\rho(r) = -e\rho_0 \exp(-\frac{r}{a})$, причому внаслідок нейтральності системи має місце умова: $\int \rho(r) d\boldsymbol{r} = -Ze$.